Ортогональные и биортогональные базисы 49 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ 1. Зайцев В. Ф. О современном групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды II Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их применения». СПб., 1998. С.137–151. 2. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. М., 1993. 3. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М., 1983. 4. Ибрагимов Н. Х. Азбука группового анализа // Знание, сер. «Математика и кибернетика». М., 1989. № 8. 5. Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа // Знание, сер. «Математика и кибернетика». М., 1991. № 7. 6. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978. 7. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М., 1989. 8. Linchuk L. V. Symmetry analysis of functional-differential equations // Math. Research. Vol.6. «Theory and practice of differential equations». St. Petersburg: SPbSTU, 2000. Р.111–117. V. Zaitsev, L. Linchuk ON SEARCHING TECHNOLOGIES OF SYMMETRIES OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS The paper is devoted to the solution of the inverse problem of group analysis for some forms of nonlocal operators. We set the task of choice of operators. We found large classes of the 2nd and the 3rd order nonlinear ordinary differential equations which admitted a factorization. These factor-systems are reduced to one or two Riccati equations. Thus the solutions of the initial equations are represented by the fundamental solutions of the 2nd order linear differential equations. УДК 532.591 С. И. Перегудин ЗАДАЧА О ВОЛНАХ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ В работе рассматриваются две частные задачи гидродинамики и теории волн — непотенциальное движение идеальной несжимаемой неоднородной жидкости над твердым и деформируемым дном. Представленная математическая модель аналитически реализована в линейной аппроксимации. Полученное решение позволяет определить волновой режим исследуемой акватории. В естественных условиях достаточно редки случаи, когда поверхность дна канала сохраняет свою первоначальную форму и остается твердой, непроницаемой и недеформируемой. В результате движения жидкости на дно оседают взвеси органического и неорганического происхождения. С течением времени на изначально твердом горизонтальном дне канала образуется подвижный деформируемый слой, представляющий собой смесь, компонентами которой являются песок, ил, глина или гравий. В результате воздействия потока жид- МАТЕМАТИКА 50 кости поверхность раздела жидкого и донного слоев принимает волнообразную форму. Вопрос о возникновении и движении песчаных волн изучается гидродинамиками с начала ХХ века. Изначально данная задача рассматривалась экспериментально [2], в результате чего была установлена предельная зависимость между скоростью потока жидкости и скоростью движения песчаных волн. Первое теоретическое обоснование рассматриваемого вопроса принадлежит Экснеру [1–3, 8], в его работах выведено уравнение, связывающее твердый расход с формой донной поверхности, и сформулирована гипотеза о линейной зависимости твердого расхода от придонной скорости. В работах [2, 3] эта гипотеза обобщается на случай произвольной зависимости расхода донного вещества от придонной скорости. Ф. И. Франкль рассмотрел задачу о плоском движении песчаных волн с учетом гидродинамики водного слоя, предполагая движение невозмущенного потока потенциальным с постоянной скоростью, а сами возмущения считая величинами малыми [8]. В статье Ю. З. Алешкова [1] рассмотрен более общий случай — непотенциальное движение слоя неоднородной жидкости над сыпучей средой. В работе [5] рассмотрен случай потенциального движения одного и двух слоев идеальной несжимаемой однородной жидкости над дном, состоящим из сыпучего вещества, в работе [6] изучен процесс распространения внутренних волн в канале переменой глубины с недеформируемым основанием. Общеизвестные трудности исследования задач теории поверхностных и внутренних гравитационных волн связаны, в первую очередь, с существенной нелинейностью граничных условий на свободной поверхности и поверхности раздела, а также с тем, что сами эти поверхности суть функции неизвестные и подлежат определению. Кроме того, если дно имеет неровности, краевое условие непротекания через дно будет линейным, но с переменными по горизонтальным координатам коэффициентами, если же дно деформировано, то — и по времени. Учет граничных условий соприкосновения тел с жидкостью также вносит существенные трудности. Поэтому нелинейная модель теории внутренних и поверхностных гравитационных волн не получила разрешения, несмотря на усилия выдающихся ученых на протяжении двух столетий. Указанные трудности настолько существенны, что в результате получило большое развитие построение и приложение упрощенных волновых моделей, которое ведет свое начало от исследований Лагранжа. 2. Основные уравнения и граничные условия Рассмотрим задачу о движении двух слоев идеальной тяжелой несжимаемой жидкости над деформируемым дном. Смоделируем рассматриваемую среду как трехслойную — два слоя неоднородной жидкости, грунт. Нижняя жидкость имеет плотность ρ1 , верхняя — ρ2 . На поверхности раздела водных слоев образуются волны. При движении нижнего слоя происходит взаимодействие жидкости с грунтом, частицы донного слоя при этом также приходят в движение. Ортогональные и биортогональные базисы 51 Расположим декартову прямоугольную систему координат таким образом, что плоскость z = 0 совпадает с невозмущенной поверхностью раздела водных слоев, ось z направлена вертикально вверх. Толщина верхнего слоя в невозмущенном состоянии — H2, нижний слой в предположении горизонтального дна имеет высоту H0. Свободная поверхность в текущий момент времени t имеет вид 2 2 z H xyt = +η (, ,) , поверхность раздела водных слоев — 1 z xyt =η (, ,), поверхность раздела жидкость—грунт — 0 z H xyt H xyt = − =− + (, ,) (, ,) η . Подвижный слой ограничен снизу твердым недеформируемым дном 1 z H = − , ( ) H H 1 0 > . В момент времени t скорость каждого слоя жидкости ( )( ) ,, , j j j jh j uvw w = v , j = 1,2, давление (, , ,) j p xyzt . Рассмотрим элементарный объем V части сыпучего слоя, ограниченный боковыми гранями с линейными размерами ∆x, ∆y , снизу — твердым недеформируемым дном 1 z H = − , сверху — поверхностью раздела 0 z H xyt =− +η(, ,) : { [ ] [ ] [ ]} 3 1 0 V xyz R xy xx x yy y z H H xyt = ∈ ∈ +∆ × +∆ ∈ − − + ( , , ) ;( , ) ; ; , ; ( , , ) , η () ( ) 1 ( ) (). HH y x o yy xx S VS S S S S S − −+η +∆ +∆ = ∂ = ∪ ∪∪ ∪∪ В данном объеме содержится масса грунта () ( , , ,) , V m t x y z t dxdyxz = ρ ∫∫∫ ρ(, , ,) x yzt — плотность грунта в точке (, ,) x y z в момент времени t . Изменение этой массы за время ∆t в предположении однородности донного вещества составит 0 (, , ) (, ,) ( ) limt m xyt t xyt mt t t x y t t η η ρ ∆ → ∂ +∆ − ∆ = ∆ = ∆ ⋅∆ ∆ ∂ ∆ . (2.1) Для определенности положим, что за рассматриваемый промежуток времени произошло увеличение массы, то есть ∆m > 0 . Данное изменение массы вызвано изменением расхода вещества через поверхность S за время ∆t . Так как 1 z H = − — поверхность твердого недеформируемого дна, расход вещества через поверхность 1 ( ) H S − равен нулю. Согласно литературе [1], расход через поверхность 0 ( ) H S − +η также обращается в ноль. Обозначив скорость перемещения грунта через (, , ,) l v x yzt , получим ( ) ( ) 0 1 ( , ,) 12 12 1 1 2 1 2 12 () ( , , ,) ( , , ,) ( , , ,) ( , , ,) . H xyt y y l l x x H y x x l l y x x mt v x t v x x t d v y tv y y td d t η ρ ττ ττ τ τ τ τ τ ττ − + +∆ − +∆ ⎡ ∆ = − +∆ + ⎢ ⎢⎣ ⎤ + − +∆ ∆ ⎥ ⎦ ∫ ∫ ∫ МАТЕМАТИКА 52 Принимая во внимание малость ∆x , ∆y , а соответственно и ∆S , увеличение массы представим в виде ( ) ( ) ] 0 1 ( , ,) 12 12 1 2 12 2 () ( , , ,) ( , , ,) ( , , ,) ( , , ,) . H xyt l l x x H l l y y mt v x x t v x t y v y y t v y t xd t η ρ ττ ττ τ τ ττ τ − + − ∆ =− +∆ − ∆ + ⎡ ⎣ + +∆ − ∆ ⋅∆ ∫ (2.2) Приравняв выражения (2.1) и (2.2), получим уравнение неразрывности для однородного донного слоя div 0 t ∂η + = ∂ Q , где Q(, ,) x y t — расход донного вещества (твердый расход) [3], 0 0 1 1 ( , ,) ( , ,) 22 22 (, , ,) , (, , ,) . H xyt H xyt l l xx yy H H Q v xy td Q v xy td η η τ τ ττ −+ −+ − − = = ∫ ∫ Для определения расхода Q необходимо знать реологию грунта. Согласно гипотезе М. А. Великанова [1–3, 8], предположим произвольную функциональную зависимость твердого расхода от горизонтальной составляющей придонной скорости ( ) 0 1 1 11 ( , ,) (, ,) (, , ,) , (, ,) b b bb z H xyt x yt xyzt u v xyt =− +η v v = = , то есть ( 1 1 , ) b b Q Q= u v . Движение идеальной несжимаемой неоднородной жидкости в слое описывается уравнениями [1] d 0, div 0, , (0,0, ) d j j jj j j j j p g t t ρ ρ ρρ ∂ + ⋅∇ = = = −∇ = − ∂ v v v gg (2.3) с соответствующими граничными условиями: на поверхности раздела жидкость—грунт [2, 5] 11 0 , 0, ( , , ), x y h Q Q w z H xyt t txy η η η η ∂ ∂ ∂ ∂ + ⋅∇ = + + = = − + ∂ ∂∂ ∂ v (2.4) на поверхности раздела жидких сред 1 12 1 , , (, ,) jh j w p p z xyt t η η η ∂ + ⋅∇ = = = ∂ v (2.5) и на твердой крышке 2 2 0, . z v zH = = (2.6) Ортогональные и биортогональные базисы 53 Задача состоит в определении функций , , jjj v ρ p , удовлетворяющих уравнению (2.3) с граничными условиями (2.4)–(2.6). Если данная задача решена, уравнения свободной поверхности и поверхностей раздела можно определить из граничных условий. 3. Задача о волнах малой амплитуды в канале с деформируемым основанием Уравнения движения (2.3) с учетом граничных условий (2.4)–(2.6) имеют решение ( ) 1 ( ), ( ), , ,0 ( ), 0, 0, 0. j j j j j j st j j j p z p pz uv z g z ρρ η η ρ ∂ = = = = = += ∂ v (3.1) При этом ( ), ( ) ~ ( ), ~ z p z z ρ j j v j st — произвольно заданные функции, а твердый расход [1] Q — постоянен. Представим движение жидкости в виде возмущения, наложенного на горизонтальный поток (3.1) ( ) 1 1 () , () , , , , , , . j j j j j j j j st j j jx jy jz ρ = + = + =+ = = = ρ ρ ηηη η z p pz p v v v ′ ′ ′ ′ ′′′ ′ ′ v v vv Рассмотрим исходную задачу для возмущенного движения ( ) () () ( ) d 0, div 0, , d j j st j j j j j j j st j j j p t t ρ ρρ ρρ ρ ∂ ′ + + ⋅∇ + = = + + = −∇ ′′ ′ ′ ′ ∂ vv v vv g с граничными условиями ( ) 11 11 1 ( ) ( ) , 0, ( ) x y x yz Q Q uz v vz v v t x y txy ∂ ∂ ∂∂ η η ηη ′ ′ ′′ ∂ ∂ + + + + = ++= ′ ′′ ∂ ∂ ∂ ∂∂ ∂ 0 z H xyt = − +η( , , ), ( ) ( ) ( ) 111 2 11 1 2 ( ) ( ) , 0, j jx j jy jz uz v vz v v g p p t xy η η η ρ ρη ∂∂∂ ′′′ + + + + = − +−= ′ ′ ′ ′′′ ∂∂∂ 1 z xyt =η ( , , ), 2 2 0, z v zH ′ = = . Рассматриваемая краевая задача для случая волн малой амплитуды примет вид d ( ) ( ) 0, div 0, d j j jj j j jz j uz vz v t x yz ∂∂∂ ρ′ ρ ρρ ′ ′ + + += = ′ ′ ∂∂∂ v d () () () , d jjj j st j j j jj z uz vz p t x yx ρ ρ ⎡ ⎤ ∂∂∂ ′′′ + + + = −∇ ′ ′ ′ ⎢ ⎥ ∂∂∂ ⎣ ⎦ vvv v v g МАТЕМАТИКА 54 11 1 0 ( ) ( ) , 0, , x y z Q Q uz vz v z H t x y txy ∂∂∂ ∂ ηηη η ′′′ ′ ∂ ∂ + + = + + = =− ′ ∂ ∂ ∂ ∂∂ ∂ ( ) 111 2 11 1 2 ( ) ( ) , 0, 0, j j jz uz vz v g p p z t xy η η η ρ ρη ∂∂∂ ′′′ + + = − +−= = ′ ′′′ ∂∂∂ 2 2 0, z v zH ′ = = . Учитывая предположение о произвольной зависимости Q от придонной скорости [1, 8], граничное условие на дне, связывающее форму его поверхности с твердым расходом, примет вид ( ) ( ) 1 1 11 1 12 2 21 1 22 2 11 12 1 1 21 22 0 0, , x y x y v v bb bb t x yx x v v z H y y ηηη κκ κκ κ κ κ κ ′ ∂ ′ ∂∂ ∂ ′′ ′ ∂ ++ ++ + + + ∂ ∂ ∂∂ ∂ ∂ ′ ∂ ′ + + = =− ∂ ∂ ( ) 0 1 01 0 1 1 1 11 12 1 21 22 2 1 1 1 ( ), ( ) d () d , . d () d x x x y y y x y z H uHvH Q Q u z v v b z Q Q b v z v v z κ κ κ κ =− − − ⎛ ⎞ ∂ ∂ ⎛ ⎞ ⎜ ⎟ ∂ ∂ ⎜ ⎟ ⎛ ⎞ ⎛⎞ ⎜ ⎟ = = ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜⎟ ⎜ ⎟ ∂ ∂ ⎝ ⎠ ⎝⎠ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ∂ ∂ ⎝ ⎠ ⎝ ⎠ Рассмотрим решение в виде бегущей волны с частотой ω и волновым числом ( ) 1 2 k = k ,k : { } { } ( 1 2 ) 1 , , , , ,, , , , , ,, . ikx k y t j j jx jy jz j j jx jy jz p v v v R P V V V AB e ω ρ ηη + − ′ ′′ ′ ′ ′′ = Для определения соответствующих амплитуд имеем уравнения ( ) 1 2 d ( ) ( ) ( ) 0, ( ) ( ) ( ) 0, d j j j jz jx jy jz ir z R z V z i k V z k V z V z z ρ + = + += ′ 1 2 d d ( ) ( ) ( ) ( ), ( ) ( ) ( ) ( ), d d j j j j jx jz j j j jy jz j u v ir z V z V z ik P z ir z V z V z ik P z z z ρ ρ ⎡ ⎤⎡ ⎤ + =− + =− ⎢ ⎥⎢ ⎥ ⎣ ⎦⎣ ⎦ (3.2) 1 2 ( ) ( ) ( ) ( ) ( ), ( ) ( ) ( ) j j jz j j j j j ir z z V z gR z P z r z k u z k v z ρ =− − = + − ′ ω с граничными условиями ir z A V z s A s V z s V z z H 1 1 1 21 31 0 ( ) ( ) 0, ( ) ( ) 0, , = = − + + = =− z xy ( ) ω ir z B V z g B P z P z z j jz ( ) ( ), ( ) ( ) 0, 0, = (ρ ρ 21 1 2 − +−= = ) (3.3) 2 2 0, , V zH z = = 1 1 1 2 2 2 1 11 2 21 3 1 12 2 22 1 1 2 2 ,,,. jj j sk k sk k sk k b b =+ = + = + = + θ θ κ κ κ κ θκ κ Ортогональные и биортогональные базисы 55 В результате преобразований уравнений (3.2) с граничными условиями (3.3) получим краевую задачу для функции () () wz V z j jz = : ( ) ( ) ( ) 2 2 22 2 ( ) ( ) 2 ( ) ( ) ( ) ( ) 2 ( ) ( ) ( ) 0, j j j j j j j jj j j r z wz wz r z rz rz rz N z wz ′′ ′ ′′ ′ − − + −− = α α k k ( ) ( ( ) ( )( )) 2 12 23 1 1 22 13 1 2 1 0 ( ) ( ) ( ) ( ) ( ), , j r z ks k s w z s k s ks kv z ku z w z z H + = − + − − =− ′ ′′ k ω () ( ) 2 2 1 1 2 11 1 11 1 2 1 2 2 2 2 2 1 ( ) ( ), ( ) ( ) ( ) ( ) , g rw z rw z rw z r w z rw z rw z r ρ ρ ρρ ρ ⎡ ⎤ = −+ − = − ′ ′ ′′ ⎢ ⎥ ⎣ ⎦ k 2 2 2 2 ( ) 1 0, ( ) 0, , ( ) , 2 . ( ) j j jj j z z wz z H N z g N z g ρ α ρ ′ = = = =− = В результате замены 0 ( ) ( )exp ( )d z jj j H wz Vz α ξ ξ − ⎛ ⎞ = −⎜ ⎟ ⎝ ⎠ ∫ для функции () V z j получим уравнение ( ) ( ) ( ) 0, V z q zV z j jj ″ + = 2 2 2 2 () 2 () () 2 () () j jj j jj j j j rz rz g q z rz r z α α α α ′′ ′ − =− − − + ′′ ′ k k с граничными условиями 11 21 0 2 2 β Vz Vz z H Vz z H ′( ) ( ), , ( ) 0, , = =− = = β 1 32 41 51 62 7 2 Vz Vz Vz Vz Vz Vz z ( ) ( ), ( ) ( ) ( ) ( ), 0, = +=+ = β ββββ ′ ′ ( ) 1 1 12 23 1 0 3 4 1 1 1 2 (0) ( ), , (0) (0) (0), (0) r ks ks r H r r β β βρ α = + − = =− ( ) ( )( ) ( ) 2 2 1 12 2 2 2 1 0 11 0 12 2 3 1 0 1 0 βω α = −+ − − − − − + − − k s ks k s ku H kv H ks k s r H H ′ ′ ( ) ( ) ( ) ( ), ( ) ( ) 2 51 1 1 1 2 1 (0) (0) (0) (0) (0) , (0) g r r r βρ ρ ρ = −+ − ′ k βρ α βρ 6 22 2 7 2 2 2 =− =− − (0) (0) (0), (0) (0) (0) . r rr ( ′ ) При ( ) const j q z = имеем 1 2 ( ) cos sin j j V z C qz C qz j jj = + . Удовлетворив граничные условия, получим систему уравнений для определения 1 2 , j j C C : МАТЕМАТИКА 56 ( ) ( ) 4 11 2 2 1234 1 2 1 2 1 0, 1,4, , , , , , , , T nk k k ax n xxxx CCC C = ∑ == = (3.4) 11 1 1 1 0 2 1 0 12 1 1 1 0 2 1 0 a q qH qH a q qH qH =− = + ββ β β sin cos , cos sin , 21 23 3 31 5 32 1 4, 33 7 34 2 6, a a a aq a a q = =− = = =− =− 0, , , , β β ββ β 13 14 22 24 41 42 aaaaaa ====== 0, условие совместности которой равносильно дисперсионному соотношению для ( ) 1 2 11 12 21 22 1 2 ωω κκκκ = kk bb , , , , , ,, 2 11 1 0 26 7 3 5 14 2 2 11 2 1 0 tg tg . tg q qH q q qH q qH β β β β ββ β β β ⎡ ⎤ ⎛ ⎞ − =− + ⎢ ⎥ ⎜ ⎟ + ⎣ ⎦ ⎝ ⎠ Функции () V z j примут вид ( ) ( ) 11 2 1 1 12 1 2 1 2 2 V z C C qz C qz V z C C qz qz ( ) cos sin , ( ) cos sin , =+ = + 2 36 11 1 0 2 1 0 ( ) 1 1 cos sin , q q qH qH C ββ β β + = − ∆ ( ) 1 2 36 11 1 0 2 1 0 1 2 1 2 1 3 sin cos , , q q qH qH C C C ββ β β β − =− = ∆ ( )( ) ( ) 7 35 11 1 0 2 1 0 134 11 1 0 2 1 0 cos sin sin cos , q qH qH q q qH qH β ββ β β ββ β β ∆ =− + + + − C — произвольная действительная постоянная. Искомые параметры возмущенного движения примут вид 0 1 2 ( )exp ( ) ( ) , z jz j j H v V z ikx k y t d ω αξ ξ − ⎛ ⎞ ′ = +−+ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ ∫ 0 1 2 2 2 1 1 12 1 ( ) ( ) exp ( ) ( ) , ( ) z j j jx j j j j j H kv ku v k k V z kV z i k x k y t d i r z α ω αξ ξ − ⎡ ⎤ ⎛ ⎞ ′ ′ − ⎛ ⎞ ′ ′ = − − +−+ ⎢ ⎥ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎣ ⎦ ⎝ ⎠ ⎝ ⎠ ∫ k 0 2 1 2 1 2 2 12 1 ( ) ( ) exp ( ) ( ) , ( ) z j j jy j j j j j H ku kv v k k V z kV z ikx k y t d i r z α ω αξ ξ − ⎡ ⎤ ⎛ ⎞ ′ ′ − ⎛ ⎞ ′ ′ = − − +−+ ⎢ ⎥ ⎜ ⎟ ⎜ ⎟ ⎣ ⎦ ⎝ ⎠ ⎝ ⎠ ∫ k ( ) 0 2 1 2 ( ) ( ) ( ) ( ) exp ( ) ( ) , z j j j jj j j j H p r z V z r zV z ikx k y t d i ρ α ω αξ ξ − ⎛ ⎞ ′ ′ = + +−+ ⎡ ⎤ ⎜ ⎟ ⎣ ⎦ ⎝ ⎠ ∫ k Ортогональные и биортогональные базисы 57 0 1 2 ( )exp ( ) ( ) , ( ) z j jj j j H V z ikx k y t d ir z ρ ρ ω αξ ξ − ⎛ ⎞ ′ = +−+ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ ∫ 0 1 0 1 1 12 1 1 exp ( ) ( ) , (0) H CC ikx k y t d ir η ω αξ ξ − ⎛ ⎞ ′ = +−+ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ ∫ ( ) 2 0 2 1 22 22 1 2 2 2 2 cos sin exp ( ) ( ) . ( ) H H C C q H q H ikx k y t d ir H η ω αξ ξ − ⎛ ⎞ ′ = + +−+ ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ ∫ В случае экспоненциального распределения плотности 0 jz j j e σ ρ ρ − = уравнение для ( ) j q z примет вид 2 2 2 2 1 () () ( ) 4 () () j jj jj j j j rz rz qz g rz r z σ σ σ ′′ ′ − =− − − + k k или 2 2 1 2 () () () () . 4 () j jj j j j j j rz rz qz rz g r z σ σ σ ⎛ ⎞ ′′ ′ − =− + + + ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ k k Данное обыкновенное дифференциальное уравнение при помощи подстановки ( ) ( ) j j j r z L r σ ′ = может быть приведено к уравнению Абеля второго рода [4]: 2 2 2 2 1 1 () () , 4 () jj j j j j j j j LL L q z r z g r z σ σ σ ⎛ ⎞ ′ − =− + + + ⎜ ⎟ ⎝ ⎠ k k аналитическое решение которого при 2 1 2 ( ) 4 j j q z =− − σ k выражается параметрически: ( ) 2 2 2 2 2 2 2 exp( ) 2 exp( ) exp( ) , . 2 2 exp( ) exp( ) j j j j j j j g g d C r L dC dC τ τ ττ τ σ σ ττ ττ − − = = − − ∫ ∫ ∫ k k В случае () j j q qz = можно построить решение с учетом начальных условий [1] 11 2 2 (0) 1, (0) 0, (0) 0, (0) 1. VV V V jj j j == = = ′ ′ Общее решение () V z j будет иметь вид 1 2 ( ) ( ) ( ). V z FV z EV z j jj jj = + Удовлетворив граничные условия ( )( ) 4 1234 112 2 1 0, 1,4, , , , , , , , T nk k k b y n y y y y FEFE = ∑ == = МАТЕМАТИКА 58 11 1 11 0 2 11 0 12 1 12 0 2 12 0 21 23 3 b VH VH b VH VH b b = − − − = − − − = =− β ′′ ′ ( ) ( ), ( ) ( ), 1, , β ββ β 31 5 32 4 33 7 34 7 43 21 2 44 22 2 b b b b b VH b VH = = =− =− = = β , , , , ( ), ( ), β ββ 13 14 22 24 41 42 bbbbbb ====== 0, получим уравнение для определения ωω κκκκ = (kk bb 1 2 11 12 21 22 1 2 , , , , , ,, ): 21 2 1 11 0 2 11 0 7 6 35 4 22 2 1 12 0 2 12 0 ( ) () () , () ( ) ( ) V H VH VH VH V H V H β β β β ββ β β β ⎡ ′ −− − ⎤ − =− ⎢ ⎥ ⎣ ′ −− − ⎦ согласно которому можно определить все искомые параметры возмущенного движения. 4. Задача о волнах малой амплитуды в канале переменной глубины Рассмотрим установившийся поток идеальной тяжелой жидкости, заключенный между твердой крышкой и дном, имеющим неровность. Предположим, что жидкость является несжимаемой и неоднородной. Рассматривая плоскую задачу, выберем декартову систему координат таким образом, чтобы ось абсцисс совпадала с невозмущенной поверхностью дна. Пусть (, ) ρ x y — плотность жидкой частицы, ( , ) p x y — гидродинамическое давление, g — ускорение силы тяжести, v— вектор скорости. Если ввести в рассмотрение вектор a v = ρ , то в безразмерных переменных имеем уравнения движения ( ) 2 div 0, 0, , gH a a aa j = ⋅∇ = ⋅∇ = − −∇ = ρ νρ ν p c (4.1) и граничные условия 0, ( ), 0, 1, n y a yx a y == == α ( , ) ( ), ( , ) ( ), ( , ) 0, . xx y ρ xy y a xy a y a xy x = = = → −∞ ρ ∞ ∞ В системе уравнений (4.1) H — глубина жидкости, c — характерная скорость. Новые единицы измерения выбираются так, чтобы расход жидкости и средняя глубина жидкости были равны единице. Преобразуя уравнения системы (4.1), приходим к уравнению для функции тока (, ) ψ x y [6, 7]: 2 ( ) ( ), ( ) ( ) 2 ∆= − = ++ ψ h yh p y ′ ′ ψ νρ ψ ψ νρ ψ a (4.2) Ортогональные и биортогональные базисы 59 с граничными условиями 0, ( ), 0, 1, ( , ) ( ), ( , ) 0, . xx y yx y a xy a y a xy x ψ α ψ ∞ == == = = → −∞ (4.3) От независимых переменных (, ) x y перейдем к новым независимым переменным (, ) x ψ . В новых переменных уравнение неразрывности из (4.1) и уравнение (4.2) запишутся следующим образом: 0, . y yy xx x xy xy a aa aa a a a a a hy x x νρ ψψ ψψ ∂ ∂∂ ∂∂ ∂ − + = + − =−′ ′ ∂ ∂∂ ∂ ∂∂ (4.4) Кроме того, очевидно, что 0 1 d ,, . (,) y x xx yy t a y x a a a xt ψ ψ ∂ ∂ = == ∂ ∂ ∫ (4.5) Граничное условие (4.3) примет вид 0, 0, 0, 1, ( ), 0, . n y x y a a aq a x ψ ψ ψ == == = = → −∞ (4.6) Подставив граничное условие при x → −∞ в систему (4.4), получим уравнение для невозмущенного горизонтального потока: 2 0 ( ) 2 () () . ( ) dq dt h d qt ψ ψ ψ νρ ψ ψ ⎡ ⎤ = − ′ ′ ⎢ ⎥ ⎣ ⎦ ∫ (4.7) При обтекании неровности дна наблюдается возмущение горизонтальной и вертикальной компонент вектора скорости a q ux a q vx x x =+ = ( ) 1 ( , ) , ( ) ( , ). ψ ( ) ψ ψψ Сделаем замену зависимых и независимых переменных, полагая q() 0 ψ > 0 . ( ) dt q t ψ η = ∫ Данное преобразование осуществляет тождественное отображение множества Dxψ = −∞ +∞ × {( ; ) [0;1]} на множество Dxη . Краевой задаче для системы уравнений (4.4) с граничными условиями (4.6) соответствует краевая задача ( ) 2 22 2 2 0 0, 1 () () () 2 1 vu u v v u x dq v dt qu q u v q q h dx u η η ηη η ψ νρ ψ ηη η ∂∂ ∂ ∂ +− + = ∂∂ ∂ ∂ ∂∂ ∂ ⎡ ⎤ + ++ − = − ⎡ ⎤ ′ ′ ⎣ ⎦ ⎣ ⎦ ∂∂ ∂ + ∫ (4.8) МАТЕМАТИКА 60 с граничными условиями ( ) u x v x v uv x + + = = = = = = → −∞ 1 cos ( ) sin ( ) 0, 0, 0, 1, 0, , θ θη η где () θ x — угол между осью x и нормалью к поверхности дна. Выражая dq q dη из уравнения (4.7) ( ) () (), dq h d η η νρ η η η = − ′ ′ исключим из уравнения (4.8) функцию h′( ) η . Таким образом, для искомых функций u x(, ) η и v x(, ) η получается следующая краевая задача: ( ) 2 2 22 2 0 0 , () 1 ( ) () 2 1 vu u v v u x dq u q u q u dt q u v dt d u η η η ηη η νρ ψ νρ η ηη η ∂∂ ∂ ∂ += − ∂∂ ∂ ∂ ∂ ∂ ⎡ ⎤ − − =− + − ′ ′ ⎡ ⎤ ⎣ ⎦ ⎣ ⎦ ∂ ∂+ ∫ ∫ (4.9) с граничными условиями −+ + = = = = ( ) u xv x v 1 sin ( ) cos ( ) 0, 0, 0, 1, γ γη η (4.10) где () γ x — угол между осью абсцисс и касательной к поверхности дна. От функций ( , ), ( , ) ux vx η η будем требовать в дальнейшем ограниченности при x → +∞ . Если задача (4.9) с граничными условиями (4.10) решена, уравнение семейства линий тока дается равенством (4.5), в котором лишь нужно сделать замену переменных 0 (, ) . 1 (,) dt y x uxt η η = + ∫ Отбрасывая в уравнении (4.9) нелинейные слагаемые, получим 2 0 ( ) 0, ( ) 0. v u dq q u q u dt x d η η νρ η η ηη ∂∂ ∂ += − − = ⎡ ⎤ ′ ⎣ ⎦ ∂∂ ∂ ∫ (4.11) В граничных условиях предположим, что отклонение донной поверхности от горизонтального положения является малым, что соответствует малости max ( ), γ x x∈[α β; ]. Вне отрезка [α β; ] будем предполагать дно горизонтальным. Используя для функции tg ( ) γ x соответствующую аппроксимацию, граничные условия (4.10) представим в виде vx x vx ( ,0) ( ), ( ,1) 0, = = γ (4.12) Ортогональные и биортогональные базисы 61 функцию () γ x , характеризующую изменение дна, будем предполагать дважды непрерывно-дифференцируемой. Исключая функцию (, ) u x η из системы (4.11), преобразуем исходную задачу к линейной краевой задаче для функции (, ) v x η : 2 2 () () () 0 d v q qv v d η η νρ η η η ∂ ⎡ ⎤ + ∆− = ′ ⎣ ⎦ ∂ (4.13) с граничными условиями (4.12). В уравнении (4.13) произведем замену 1 ( , ) ( , ). ( ) vx vx q η η η = (4.14) Для функции v x (, ) η получим краевую задачу ( ) ( ) ( ) 0, [ ] ( ,0) (0) ( ), ( ,1) 0. q vq v vx q x vx η η νρ η γ ∆− + = ′′ ′ = = (4.15) Краевая задача (4.15) — однородное уравнение Гельмгольца с неоднородными граничными условиями. Коэффициент при (, ) v x η в уравнении Гельмгольца зависит от скорости набегающего потока и скорости изменения плотности вдоль линий тока. Перенесем неоднородность из краевых условий в исходное уравнение при помощи введения вспомогательной функции S x(, ) η : vx Sx q x ( , ) ( , ) (0) ( )(1 ). η = η γη + − (4.16) Для функции (, ) S x η получим граничную задачу ( , ) ( ) ( , ) (0) ( ) ( ) ( ) ( 1), [ ] ( ,0) ( ,1) 0, ( ) ( ) ( ) ( ). Sx f Sx q x f x Sx Sx q f q η η η γ ηγ η η η η νρ η ∆− = − − ′′ = = =+ ′′ ′ (4.17) Предположим ( ) const f C η = ≡ . В этом случае плотность () ρ η связана со скоростью набегающего потока соотношением 1 22 0 ( ) ( ) ( ) , const, C q t dt q C C η νρη η = −+ = ′ ∫ (4.18) а системе (4.17) соответствует неоднородное уравнение Гельмгольца с постоянным коэффициентом для функции (, ) S x η с однородными краевыми условиями ( , ) ( , ) (0) ( ) ( ) ( 1), [ ] ( ,0) ( ,1) 0. S x CS x q x C x Sx Sx ∆ η η γ γη −= − − ′′ = = МАТЕМАТИКА 62 Решение данной задачи будем искать в виде [6] [ ] 1 1 ( , ) ( )sin , , (0) ( ) ( ) ( 1) ( , ) ( )sin . n nn n n n n Sx S x n q x C x x Cx η δη δ π γ γ η η δη ∞ = ∞ = = = ′′ − − =Φ = ∑ ∑ (4.19) Для функции () n S x получим обыкновенное дифференциальное уравнение ( ) [ ] 2 2 ( ) ( ) (0) ( ) ( ) nnn n S x CS x q x C x δ γγ δ ′′ ′′ − + =− − с граничными условиями ( ) 0, , ( ) , , n n Sx x Sx x = → −∞ < +∞ → +∞ общее решение которого имеет вид ( ) [ ] ( ) 2 2 2 2 (0) ( ) ( ) ( ) sh . x n n n n n q C S x C C xd C δ γ ξ γξ δ ξ ξ δ δ −∞ + = − +− ′′ + ∫ Подставив выражение для () n S x в (4.14), (4.16) и (4.19), получим выражение для вертикальной скорости: ( ) [ ] ( ) 2 2 2 1 1 2 (0) ( , ) ( ) ( ) sh sin ( ) (0) ( )(1 ). ( ) x n n n n n n q C vx C C xd q C q x q δ η γ ξ γ ξ δ ξ ξ δη η δ δ γ η η ∞ = −∞ + = − +− ⋅ + ′′ + + − ∑ ∫ Так как горизонтальная и вертикальная скорости связаны между собой соотношением (4.11), выражение для (, ) v x η будет иметь вид ( ) [ ] ( ) 2 2 2 1 2 2 2 (0) ( )cos ( )sin (, ) ( ) ( ) (1 ) ( ) ( ) ( ) sh (0) ( ) . ( ) n nn n n n n x x n q C q q u x C q q q d C C dq d q ξ δ δ η δη η δη η δ δ η η ηη ξ γ ς γς δ ξ ς ς γξ ξ η ∞ = −∞ −∞ −∞ + − ′ = ⋅ + + − ′ ⋅ − +− + ′′ ∑ ∫∫ ∫ Если предположить, что функция f ( ) η из системы (4.17) тождественно равна нулю, что соответствует случаю, когда соотношение между плотностью ρ( ) η и скоростью набегающего потока имеет вид 2 νρη η ( ) ( ) const, + =≡ q C ′ (4.20) Ортогональные и биортогональные базисы 63 выражения для вертикальной и горизонтальной скорости примут вид ( ) [ ] ( ) 2 1 2 2 1 2 1 (0) 2 (0) ( , ) ( ) sh sin ( )(1 ), () () 1 2 (0) ( , ) ( )cos ( )sin ( ) ( ) (1 ) ( ) ( ) sh (0) ( ) . ( ) x n n n n n nn n n n x x n q C q vx xd x q q q ux q q q q q d dq d q ξ δ η γ ξ δ ξ ξ δη γ η ηδ η η δ η δη η δη η δ η ηη ξ γ ς δ ξ ς ς γξ ξ η ∞ = −∞ ∞ = −∞ −∞ −∞ + = −⋅ + − ′′ = −⋅ ′ + − ′ ⋅ −+ ′′ ∑ ∫ ∑ ∫∫ ∫ Если предположить, что твердая крышка имеет неровность, расположенную, вообще говоря, несимметрично по отношению к неровности дна, или что граничные условия (4.12) имеют вид vx x vx rx ( ,0) ( ), ( ,1) ( ), = = γ (4.21) где r x( ) — дважды непрерывно-дифференцируемая функция — угол между осью абсцисс и касательной к твердой крышке, в этом случае вспомогательная функция (4.16) ( , ) S x η будет выглядеть следующим образом: vx Sx q x q rx ( , ) ( , ) (0) ( )(1 ) (0) ( ) . η = + −+ η γη η Краевая задача для S x(, ) η примет вид { } [ ][ ] (, ) () (, ) (0) ( ) ( ) ( ) ( 1) ( ) ( ) ( ) , ( ,0) ( ,1) 0, ( ) ( ) ( ) ( ). Sx f Sx q x f x r x f rx Sx Sx q f q η η η γ ηγ η η η η η η νρ η ∆− = = − −− − ′′ ′′ = = =+ ′′ ′ Отыскивая решение (, ) S x η в виде (4.19), при соотношении между плотностью и скоростью набегающего потока (4.18), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции () n S x ( ) { } [ ][ ] 2 2 ( ) ( ) (0) ( 1) ( ) ( ) ( ) ( ) n nnn n S x C S x q r x Cr x x C x δ γγ δ ′′ ′′ ′′ −+ = − − − − с граничными условиями (4.21). Общее решение данной задачи имеет вид ( ) { } [ ][ ] ( ) 2 1 2 2 2 (0) ( ) ( ) ( ) ( 1) ( ) ( ) sh . x n n n n n n q C S x C r Cr C x d C δ γ ξ γξ ξ ξ δ ξ ξ δ δ + −∞ + = − +− − + − ′′ ′′ + ∫ Выражения для вертикальной и горизонтальной скорости соответственно примут вид МАТЕМАТИКА 64 ( ) { } [ ][ ] ( ) ( ) [ ] 2 1 2 1 2 2 2 2 2 1 1 2 (0) ( , ) ( ) ( ) ( 1) ( ) ( ) ( ) (0) (0) sh sin ( )(1 ) ( ) , () () 1 2 (0) ( , ) ( )cos ( )sin ( ) ( ) x n n n n n n n n nn n n n n x q C v x C r Cr q C q q C xd x rx q q q C ux q q q C d C δ η γ ξ γξ ξ ξ η δ δ δ ξ ξ δη γ η η η η δ η δ η δη η δη η δ δ ξ γξ ∞ + = −∞ ∞ = −∞ + = − +− − ⋅ ′′ ′′ + ⋅ + − ⋅ + −+ + = −⋅ ′ + ⋅ − ′′ ∑ ∫ ∑ ∫ { } [ ][ ] ( ) [ ][ ] 1 2 2 ( ) ( 1) ( ) ( ) sh (0) () () () () () () . ( ) n n x x r Cr C d q q dq q rd q ξ γξ ξ ξ δ ξ ς ς η γξ ξ η ηη γξ ξ ξ η + −∞ −∞ −∞ +− − + − + ′′ ⎧ ⎫ + +− − ⎨ ⎬ ′ ′ ⎩ ⎭ ∫ ∫ ∫ В предположении (4.20) выражения для составляющих вектора скорости примут вид ( ) [ ] ( ) 1 2 1 2 2 1 1 1 2 (0) ( , ) ( ) ( 1) ( ) sh sin ( ) (0) (0) ( )(1 ) ( ) , () () 1 2 (0) ( , ) ( )cos ( )sin ( ) ( ) ( 1) ( ) sh x n n n n n nn n n n x n n q vx r xd q q q x rx q q q ux q q q d rd ξ η γ ξ ξ δ ξ ξ δη η δ γη η η η η δ η δη η δη η δ ξ γς ς δξ ς ς ∞ + = −∞ ∞ = + −∞ −∞ = +− − ⋅ + ⎡ ⎤ ′′ ′′ ⎣ ⎦ + −+ = −⋅ ′ ⋅ +− − + ⎡ ⎤ ′′ ′′ ⎣ ⎦ + ∑ ∫ ∑ ∫ ∫ [ ][ ] 2 (0) () () () () () () . ( ) x x q q dq q rd q η γξ ξ η ηη γξ ξ ξ η −∞ −∞ ⎧ ⎫ ⎨ ⎬ ′ ′ +− − ⎩ ⎭ ∫ ∫ (4.22) Таким образом, из выражений (4.22) видно, что отклонение линий тока в возмущенном потоке от соответствующих линий тока в плоскопараллельном потоке характеризуется величиной () n S x , целиком зависящей от неровности твердой границы. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ 1. Алешков Ю. З. Волны на поверхности сыпучих сред, вызванные потоком жидкости // Вестник С.-Петерб. ун-та. 2002. Сер. 1. Вып.4 (№ 25). С. 35–43. 2. Великанов М. А. Движение наносов. М., 1948. 3. Великанов М. А. Динамика русловых потоков. М., 1954. 4. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. М., 1995. 5. Перегудин С. И. Пространственные волновые движения на поверхности сыпучих сред // Труды Средневолжского математического общества. 2003. Т. 5. № 1. С. 130–138. Ортогональные и биортогональные базисы 65 6. Перегудин С. И. Течение стратифицированной жидкости в канале переменной глубины (депонированная рукопись) // Труды семинара по дифференциальным уравнениям Мордовского гос. университета. Саранск, январь—июнь 1993 г., № 2076-В93. 7. Тер-Крикоров А. М. О внутренних волнах в неоднородной жидкости. ПММ, 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 1067–1076. 8. Франкль Ф. И. О движении песчаных волн // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. № 1. С. 29–32. S. Peregudin THE PROBLEM ON LOW AMPLITUDE WAVES IN THE CHANGEABLE DEPTH CHANNEL The article is devoted to two problems of hydrodynamics and the wave theory: non potential movement of an ideal incompressible non-uniform liquid above a firm and deformable bottom. A mathematical model is analytically given in a linear approximation. The final solutions allow defining a wave mode for the researched water area. В. Н. Горбузов, С. Н. Даранчук ИНТЕГРАЛЬНЫЙ БАЗИС СИСТЕМЫ ЯКОБИ—ГЕССЕ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ Для якобиевой линейной однородной системы Якоби—Гессе в частных производных разработан спектральный метод построения интегрального базиса. Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему уравнений в частных производных ( ) 0, 1, , j ℑ == x u jm (1) построенную на основании не являющихся линейно связанными на арифметическом пространстве Rn линейных дифференциальных операторов , 1 1 ( ) ( ( ) ( )) , R , 1, , i n n j ji i j n x i x a x xa x x j m + = ℑ = − ∂ ∀∈ = ∑ где функции , 1 1 : , R , 1, , 1, 1, n n j jii jn i a x ax a x j m n τ ττ τ + = → + ∀∈ = = + ∑ коэффициенты ( 1, , 1, 1, 1,n 1 ) j a jm n τ δ = =+ =+ τ δ суть числа из поля R такие, что , 1, 1 | | 0, 1, . n jn i i a jm + = ∑ ≠ = (2)